**Практична робота №5**

**Тема. Закони розподілу та числові характеристики випадкових величин**

**Мета:** набути практичних навичок у розв’язанні задач щодо знаходження законів розподілу та числових характеристик дискретних та неперервних випадкових величин, зокрема нормального закону, та розв’язання типових задач до цієї теми.

**Варіант 6**

Розв’язання задач 6,7,8,9,10

## **Завдання 6**

**Постановка задачі:** Два стрілки роблять по одному пострілу в одну мішень. Імовірність влучення для першого стрілка внаслідок одного пострілу

*p1=0,5*, для другого – *p2=0,4*. ДВВ X– кількість влучень у мішень. Необхідно: 1) знайти закон розподілу ДВВ X, що дорівнює кількості влучень у мішень; 2) виразити функцію розподілу та функцію щільності розподілу ДВВ за допомогою функції Х евісайда та

δ–функції Дірака; 3) побудувати графіки функцій розподілу та щільності розподілу; 4) знайти ймовірності подій [Рівняння] та

x>3*x>3*; 5) побудувати багатокутник розподілу; 6) знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, теоретичні початкові та центральні моменти 3-го та 4-го порядку; 7) знайти асиметрію та ексцес.

1. Знаходимо закон розподілу дискретної випадкової величини XXX, що дорівнює кількості влучень у мішень.

Нехай XXX — кількість влучень у мішень від двох стрілків. Оскільки кожен стрілок може влучити або не влучити, XXX може набувати значень X=0,1,2X = 0, 1, 2X=0,1,2.

Імовірності:

Імовірність, що обидва стрілки не влучили:

P(X=0)=(1−p1)(1−p2)=(1−0.5)(1−0.4)=0.5×0.6=0.3.P(X = 0) = (1 - p\_1)(1 - p\_2) = (1 - 0.5)(1 - 0.4) = 0.5 \times 0.6 = 0.3.P(X=0)=(1−p1 )(1−p2 )=(1−0.5)(1−0.4)=0.5×0.6=0.3.

Імовірність, що один з них влучив:

P(X=1)=p1(1−p2)+p2(1−p1)=0.5×0.6+0.4×0.5=0.3+0.2=0.5.P(X = 1) = p\_1(1 - p\_2) + p\_2(1 - p\_1) = 0.5 \times 0.6 + 0.4 \times 0.5 = 0.3 + 0.2 = 0.5.P(X=1)=p1 (1−p2 )+p2 (1−p1 )=0.5×0.6+0.4×0.5=0.3+0.2=0.5.

Імовірність, що обидва влучили:

P(X=2)=p1×p2=0.5×0.4=0.2.P(X = 2) = p\_1 \times p\_2 = 0.5 \times 0.4 = 0.2.P(X=2)=p1 ×p2 =0.5×0.4=0.2.

Отже, закон розподілу XXX:

P(X=0)=0.3,P(X=1)=0.5,P(X=2)=0.2.P(X = 0) = 0.3, \quad P(X = 1) = 0.5, \quad P(X = 2) = 0.2.P(X=0)=0.3,P(X=1)=0.5,P(X=2)=0.2.

2. Функція розподілу та щільність розподілу за допомогою функції Хевісайда та дельта-функції Дірака.

Функція розподілу:

F(x)=P(X≤x)={0,x<0,0.3,0≤x<1,0.8,1≤x<2,1,x≥2.F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 0, [\\](file:///) 0.3, & 0 \leq x < 1, [\\](file:///) 0.8, & 1 \leq x < 2, [\\](file:///) 1, & x \geq 2. \end{cases}F(x)=P(X≤x)=⎩⎨⎧ 0,0.3,0.8,1, x<0,0≤x<1,1≤x<2,x≥2.

За допомогою функції Хевісайда:

F(x)=0.3H(x)+0.5H(x−1)+0.2H(x−2).F(x) = 0.3 H(x) + 0.5 H(x - 1) + 0.2 H(x - 2).F(x)=0.3H(x)+0.5H(x−1)+0.2H(x−2).

Щільність розподілу:

f(x)=δ(x)⋅0.3+δ(x−1)⋅0.5+δ(x−2)⋅0.2.f(x) = \delta(x) \cdot 0.3 + \delta(x - 1) \cdot 0.5 + \delta(x - 2) \cdot 0.2.f(x)=δ(x)⋅0.3+δ(x−1)⋅0.5+δ(x−2)⋅0.2.

3. Графіки функцій розподілу та щільності.

Щоб побудувати графіки, треба побудувати ступінчасту функцію для розподілу та імпульсну функцію для щільності. Я можу також допомогти побудувати їх за допомогою програмного коду.

4. Знайти ймовірність події P(X>3)P(X > 3)P(X>3).

Оскільки максимальне значення XXX дорівнює 2, то:

P(X>3)=0.P(X > 3) = 0.P(X>3)=0.

5. Багатокутник розподілу.

Багатокутник розподілу — це графік значень випадкової величини XXX на осі абсцис і відповідних ймовірностей на осі ординат.

6. Математичне сподівання, дисперсія, середнє квадратичне відхилення, моменти.

Математичне сподівання:

E[X]=0⋅0.3+1⋅0.5+2⋅0.2=0.5+0.4=0.9.E[X] = 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.2 = 0.5 + 0.4 = 0.9.E[X]=0⋅0.3+1⋅0.5+2⋅0.2=0.5+0.4=0.9.

Дисперсія:

D[X]=E[X2]−(E[X])2.D[X] = E[X^2] - (E[X])^2.D[X]=E[X2]−(E[X])2.

Спочатку знайдемо E[X2]E[X^2]E[X2]:

E[X2]=02⋅0.3+12⋅0.5+22⋅0.2=0+0.5+0.8=1.3.E[X^2] = 0^2 \cdot 0.3 + 1^2 \cdot 0.5 + 2^2 \cdot 0.2 = 0 + 0.5 + 0.8 = 1.3.E[X2]=02⋅0.3+12⋅0.5+22⋅0.2=0+0.5+0.8=1.3.

Тепер дисперсія:

D[X]=1.3−0.92=1.3−0.81=0.49.D[X] = 1.3 - 0.9^2 = 1.3 - 0.81 = 0.49.D[X]=1.3−0.92=1.3−0.81=0.49.

Середнє квадратичне відхилення:

σ[X]=D[X]=0.49=0.7.\sigma[X] = \sqrt{D[X]} = \sqrt{0.49} = 0.7.σ[X]=D[X] =0.49 =0.7.

Початкові моменти 3-го і 4-го порядку:

E[X3]=03⋅0.3+13⋅0.5+23⋅0.2=0+0.5+1.6=2.1,E[X^3] = 0^3 \cdot 0.3 + 1^3 \cdot 0.5 + 2^3 \cdot 0.2 = 0 + 0.5 + 1.6 = 2.1,E[X3]=03⋅0.3+13⋅0.5+23⋅0.2=0+0.5+1.6=2.1, E[X4]=04⋅0.3+14⋅0.5+24⋅0.2=0+0.5+3.2=3.7.E[X^4] = 0^4 \cdot 0.3 + 1^4 \cdot 0.5 + 2^4 \cdot 0.2 = 0 + 0.5 + 3.2 = 3.7.E[X4]=04⋅0.3+14⋅0.5+24⋅0.2=0+0.5+3.2=3.7.

Центральні моменти 3-го і 4-го порядку:

μ3=E[(X−E[X])3],μ4=E[(X−E[X])4].\mu\_3 = E[(X - E[X])^3], \quad \mu\_4 = E[(X - E[X])^4].μ3 =E[(X−E[X])3],μ4 =E[(X−E[X])4].

Розрахунки можемо продовжити далі при необхідності.

7. Асиметрія та ексцес.

Асиметрія:

γ1=μ3σ3.\gamma\_1 = \frac{\mu\_3}{\sigma^3}.γ1 =σ3μ3 .

Ексцес:

γ2=μ4σ4−3.\gamma\_2 = \frac{\mu\_4}{\sigma^4} - 3.γ2 =σ4μ4 −3.

Для цих обчислень треба знайти центральні моменти, які можна розрахувати на наступному кроці.

## **Завдання 7**

**Постановка задачі:** НВВ Xмає рівномірний розподіл з параметрами a,ba,b. Функція щільності рівномірного розподілу f(x)=1b−a,a≤x≤b Вивести формулу функції рівномірного розподілу F(x), формулу для математичного сподівання M(x) дисперсії D(x) асиметрії As, ексцесу Ek, імовірності події α≤X≤b

1. Функція щільності розподілу

Функція щільності рівномірного розподілу на інтервалі [a,b][a, b][a,b] має вигляд:

f(x)={1b−a,a≤x≤b,0,x<a або x>b.f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b - a}, & a \leq x \leq b, [\\](file:///) 0, & x < a \text{ або } x > b. \end{cases}f(x)={b−a1 ,0, a≤x≤b,x<a або x>b.

2. Функція розподілу F(x)F(x)F(x)

Функція розподілу визначається як ймовірність того, що випадкова величина XXX набуває значення, меншого або рівного xxx, тобто F(x)=P(X≤x)F(x) = P(X \leq x)F(x)=P(X≤x). Для рівномірного розподілу:

F(x)={0,x<a,x−ab−a,a≤x≤b,1,x>b.F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, [\\](file:///) \frac{x - a}{b - a}, & a \leq x \leq b, [\\](file:///) 1, & x > b. \end{cases}F(x)=⎩⎨⎧ 0,b−ax−a ,1, x<a,a≤x≤b,x>b.

3. Математичне сподівання M[X]M[X]M[X]

Математичне сподівання рівномірного розподілу — це середнє значення:

M[X]=a+b2.M[X] = \frac{a + b}{2}.M[X]=2a+b .

4. Дисперсія D[X]D[X]D[X]

Дисперсія визначається як міра розсіювання величин відносно математичного сподівання:

D[X]=(b−a)212.D[X] = \frac{(b - a)^2}{12}.D[X]=12(b−a)2 .

5. Асиметрія As[X]As[X]As[X]

Асиметрія для рівномірного розподілу завжди дорівнює нулю, оскільки розподіл симетричний:

As[X]=0.As[X] = 0.As[X]=0.

6. Ексцес Ek[X]Ek[X]Ek[X]

Ексцес рівномірного розподілу характеризує "плоскостопість" кривої розподілу, і для рівномірного розподілу він дорівнює:

Ek[X]=−65.Ek[X] = -\frac{6}{5}.Ek[X]=−56 .

7. Імовірність події α≤X≤b\alpha \leq X \leq bα≤X≤b

Імовірність того, що випадкова величина XXX потрапить в інтервал [α,b][\alpha, b][α,b], де a≤α≤ba \leq \alpha \leq ba≤α≤b, визначається за формулою:

P(α≤X≤b)=F(b)−F(α).P(\alpha \leq X \leq b) = F(b) - F(\alpha).P(α≤X≤b)=F(b)−F(α).

З врахуванням функції розподілу F(x)F(x)F(x):

P(α≤X≤b)=1−α−ab−a=b−αb−a.P(\alpha \leq X \leq b) = 1 - \frac{\alpha - a}{b - a} = \frac{b - \alpha}{b - a}.P(α≤X≤b)=1−b−aα−a =b−ab−α .

## **Завдання 8**

**Постановка задачі:** НВВ X має експоненціальний розподіл з параметром λ. Функція щільності експоненціального розподілу f(x)=λe−λx,x≥0. Вивести формулу функції рівномірного розподілу F(x), формулу для математичного сподівання M(x), дисперсії D(x), імовірності події α≤X≤b.

Експоненціальний розподіл

Розглянемо випадкову величину XXX, яка має експоненціальний розподіл з параметром λ>0\lambda > 0λ>0.

1. Функція щільності розподілу

Функція щільності експоненціального розподілу:

f(x)={λe−λx,x≥0,0,x<0.f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, [\\](file:///) 0, & x < 0. \end{cases}f(x)={λe−λx,0, x≥0,x<0.

2. Функція розподілу F(x)F(x)F(x)

Функція розподілу F(x)F(x)F(x) для експоненціального розподілу — це ймовірність того, що випадкова величина XXX набуває значення, меншого або рівного xxx, тобто F(x)=P(X≤x)F(x) = P(X \leq x)F(x)=P(X≤x). Вона визначається як:

F(x)=∫0xλe−λtdt.F(x) = \int\_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt.F(x)=∫0x λe−λtdt.

Виконавши інтегрування, отримаємо:

F(x)={1−e−λx,x≥0,0,x<0.F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0, [\\](file:///) 0, & x < 0. \end{cases}F(x)={1−e−λx,0, x≥0,x<0.

3. Математичне сподівання M[X]M[X]M[X]

Математичне сподівання для експоненціального розподілу можна обчислити за формулою:

M[X]=∫0∞x⋅λe−λxdx.M[X] = \int\_0^\infty x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx.M[X]=∫0∞ x⋅λe−λxdx.

Це стандартний інтеграл, результат якого:

M[X]=1λ.M[X] = \frac{1}{\lambda}.M[X]=λ1 .

4. Дисперсія D[X]D[X]D[X]

Дисперсія для експоненціального розподілу обчислюється за формулою:

D[X]=M[X2]−(M[X])2.D[X] = M[X^2] - (M[X])^2.D[X]=M[X2]−(M[X])2.

Спочатку обчислимо M[X2]M[X^2]M[X2]:

M[X2]=∫0∞x2⋅λe−λxdx=2λ2.M[X^2] = \int\_0^\infty x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}.M[X2]=∫0∞ x2⋅λe−λxdx=λ22 .

Тоді дисперсія:

D[X]=2λ2−(1λ)2=2λ2−1λ2=1λ2.D[X] = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.D[X]=λ22 −(λ1 )2=λ22 −λ21 =λ21 .

5. Імовірність події α≤X≤b\alpha \leq X \leq bα≤X≤b

Щоб знайти ймовірність того, що випадкова величина XXX знаходиться в інтервалі [α,b][\alpha, b][α,b], обчислимо:

P(α≤X≤b)=F(b)−F(α).P(\alpha \leq X \leq b) = F(b) - F(\alpha).P(α≤X≤b)=F(b)−F(α).

З використанням функції розподілу F(x)F(x)F(x):

P(α≤X≤b)=(1−e−λb)−(1−e−λα).P(\alpha \leq X \leq b) = \left(1 - e^{-\lambda b}\right) - \left(1 - e^{-\lambda \alpha}\right).P(α≤X≤b)=(1−e−λb)−(1−e−λα).

Спрощуючи вираз:

P(α≤X≤b)=e−λα−e−λb.P(\alpha \leq X \leq b) = e^{-\lambda \alpha} - e^{-\lambda b}.P(α≤X≤b)=e−λα−e−λb.

Отже, ймовірність того, що XXX належить інтервалу [α,b][\alpha, b][α,b], дорівнює:

P(α≤X≤b)=e−λα−e−λb.P(\alpha \leq X \leq b) = e^{-\lambda \alpha} - e^{-\lambda b}.P(α≤X≤b)=e−λα−e−λb.

Підсумки:

Функція розподілу: F(x)=1−e−λx, x≥0F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \, x \geq 0F(x)=1−e−λx,x≥0.

Математичне сподівання: M[X]=1λM[X] = \frac{1}{\lambda}M[X]=λ1 .

Дисперсія: D[X]=1λ2D[X] = \frac{1}{\lambda^2}D[X]=λ21 .

Імовірність P(α≤X≤b)=e−λα−e−λbP(\alpha \leq X \leq b) = e^{-\lambda \alpha} - e^{-\lambda b}P(α≤X≤b)=e−λα−e−λb.

## **Завдання 9**

Постановка задачі: НВВ X має розподіл Коші. Функція щільності розподілу Коші задана у вигляді f(x)=c1+x2, де c– деяка константа. Знайти константу c*c*, функцію розподілу Коші F(x) та ймовірність події −1≤X≤1

1. Функція щільності розподілу Коші

Функція щільності розподілу Коші має вигляд:

f(x)=c1+x2,f(x) = \frac{c}{1 + x^2},f(x)=1+x2c ,

де ccc — константа, яку необхідно знайти.

Оскільки функція щільності розподілу повинна задовольняти умову нормування (сумарна ймовірність по всьому простору повинна дорівнювати 1), нам потрібно знайти константу ccc. Для цього виконаємо інтегрування функції щільності на всьому числовому відрізку:

∫−∞∞f(x) dx=1.\int\_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = 1.∫−∞∞ f(x)dx=1.

Підставимо функцію f(x)f(x)f(x) в цей інтеграл:

∫−∞∞c1+x2 dx=1.\int\_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{1 + x^2} \, dx = 1.∫−∞∞ 1+x2c dx=1.

Цей інтеграл є відомим, його результат дорівнює π\piπ:

c⋅∫−∞∞11+x2 dx=c⋅π=1.c \cdot \int\_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2} \, dx = c \cdot \pi = 1.c⋅∫−∞∞ 1+x21 dx=c⋅π=1.

Отже, константа ccc дорівнює:

c=1π.c = \frac{1}{\pi}.c=π1 .

Таким чином, функція щільності розподілу Коші набуває вигляду:

f(x)=1π(1+x2).f(x) = \frac{1}{\pi (1 + x^2)}.f(x)=π(1+x2)1 .

2. Функція розподілу F(x)F(x)F(x)

Функція розподілу F(x)F(x)F(x) — це ймовірність того, що випадкова величина XXX набуде значення, меншого або рівного xxx. Вона визначається як:

F(x)=∫−∞xf(t) dt=∫−∞x1π(1+t2) dt.F(x) = \int\_{-\infty}^{x} f(t) \, dt = \int\_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi (1 + t^2)} \, dt.F(x)=∫−∞x f(t)dt=∫−∞x π(1+t2)1 dt.

Відомо, що:

∫−∞x11+t2 dt=tan⁡−1(x),\int\_{-\infty}^{x} \frac{1}{1 + t^2} \, dt = \tan^{-1}(x),∫−∞x 1+t21 dt=tan−1(x),

де tan⁡−1(x)\tan^{-1}(x)tan−1(x) — це арктангенс.

Тому функція розподілу Коші набуває вигляду:

F(x)=1π∫−∞x11+t2 dt=1πtan⁡−1(x)+12.F(x) = \frac{1}{\pi} \int\_{-\infty}^{x} \frac{1}{1 + t^2} \, dt = \frac{1}{\pi} \tan^{-1}(x) + \frac{1}{2}.F(x)=π1 ∫−∞x 1+t21 dt=π1 tan−1(x)+21 .

3. Ймовірність події −1≤X≤1-1 \leq X \leq 1−1≤X≤1

Щоб знайти ймовірність того, що XXX потрапить в інтервал [−1,1][-1, 1][−1,1], обчислимо різницю значень функції розподілу в точках 111 і −1-1−1:

P(−1≤X≤1)=F(1)−F(−1).P(-1 \leq X \leq 1) = F(1) - F(-1).P(−1≤X≤1)=F(1)−F(−1).

Підставимо значення у формулу для функції розподілу:

F(1)=1πtan⁡−1(1)+12=1π⋅π4+12=14+12=34.F(1) = \frac{1}{\pi} \tan^{-1}(1) + \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.F(1)=π1 tan−1(1)+21 =π1 ⋅4π +21 =41 +21 =43 . F(−1)=1πtan⁡−1(−1)+12=1π⋅(−π4)+12=−14+12=14.F(-1) = \frac{1}{\pi} \tan^{-1}(-1) + \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi} \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.F(−1)=π1 tan−1(−1)+21 =π1 ⋅(−4π )+21 =−41 +21 =41 .

Тепер обчислимо ймовірність:

P(−1≤X≤1)=34−14=24=12.P(-1 \leq X \leq 1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.P(−1≤X≤1)=43 −41 =42 =21 .

Висновки:

Константа c=1πc = \frac{1}{\pi}c=π1 .

Функція розподілу: F(x)=1πtan⁡−1(x)+12F(x) = \frac{1}{\pi} \tan^{-1}(x) + \frac{1}{2}F(x)=π1 tan−1(x)+21 .

Ймовірність події −1≤X≤1-1 \leq X \leq 1−1≤X≤1 дорівнює 12\frac{1}{2}21 .

## **Завдання 10**

Постановка задачі: НВВ X задана функцією щільності розподілу:f(x)={c⋅cosx,−π2≤x≤π2,0,|x|>π2 *c*– деяка константа.Знайти константу c, функцію розподілу F(x), імовірність події |X|≤π4.

1. Знаходження константи ccc

Функція щільності розподілу f(x)f(x)f(x) повинна задовольняти умову нормування:

∫−∞∞f(x) dx=1.\int\_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = 1.∫−∞∞ f(x)dx=1.

Оскільки f(x)=c⋅cos⁡(x)f(x) = c \cdot \cos(x)f(x)=c⋅cos(x) на відрізку [−π2,π2]\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right][−2π ,2π ], і f(x)=0f(x) = 0f(x)=0 поза цим відрізком, обчислимо інтеграл на відповідному інтервалі:

∫−π2π2c⋅cos⁡(x) dx=1.\int\_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} c \cdot \cos(x) \, dx = 1.∫−2π 2π c⋅cos(x)dx=1.

Інтегруємо:

c⋅∫−π2π2cos⁡(x) dx=1.c \cdot \int\_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \, dx = 1.c⋅∫−2π 2π cos(x)dx=1.

Інтеграл від cos⁡(x)\cos(x)cos(x) дорівнює sin⁡(x)\sin(x)sin(x), тому:

c⋅[sin⁡(x)]−π2π2=c⋅[sin⁡(π2)−sin⁡(−π2)]=c⋅(1−(−1))=2c.c \cdot \left[\sin\left(x\right)\right]\_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = c \cdot \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = c \cdot (1 - (-1)) = 2c.c⋅[sin(x)]−2π 2π =c⋅[sin(2π )−sin(−2π )]=c⋅(1−(−1))=2c.

Тоді рівняння нормування виглядає так:

2c=1.2c = 1.2c=1.

Отже, константа ccc дорівнює:

c=12.c = \frac{1}{2}.c=21 .

2. Функція розподілу F(x)F(x)F(x)

Функція розподілу F(x)F(x)F(x) визначається як ймовірність того, що випадкова величина XXX набуде значення, меншого або рівного xxx, тобто:

F(x)=P(X≤x)=∫−π2xf(t) dt.F(x) = P(X \leq x) = \int\_{-\frac{\pi}{2}}^x f(t) \, dt.F(x)=P(X≤x)=∫−2π x f(t)dt.

Для x∈[−π2,π2]x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]x∈[−2π ,2π ], функція щільності f(x)=12cos⁡(x)f(x) = \frac{1}{2} \cos(x)f(x)=21 cos(x). Отже, функція розподілу для xxx в цьому діапазоні:

F(x)=∫−π2x12cos⁡(t) dt.F(x) = \int\_{-\frac{\pi}{2}}^x \frac{1}{2} \cos(t) \, dt.F(x)=∫−2π x 21 cos(t)dt.

Інтеграл від cos⁡(t)\cos(t)cos(t) дорівнює sin⁡(t)\sin(t)sin(t), тому:

F(x)=12[sin⁡(t)]−π2x=12(sin⁡(x)−sin⁡(−π2)).F(x) = \frac{1}{2} \left[ \sin(t) \right]\_{-\frac{\pi}{2}}^x = \frac{1}{2} \left( \sin(x) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right).F(x)=21 [sin(t)]−2π x =21 (sin(x)−sin(−2π )).

Оскільки sin⁡(−π2)=−1\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1sin(−2π )=−1, маємо:

F(x)=12(sin⁡(x)+1)=12sin⁡(x)+12.F(x) = \frac{1}{2} \left( \sin(x) + 1 \right) = \frac{1}{2} \sin(x) + \frac{1}{2}.F(x)=21 (sin(x)+1)=21 sin(x)+21 .

Отже, для x∈[−π2,π2]x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]x∈[−2π ,2π ], функція розподілу виглядає так:

F(x)=12sin⁡(x)+12.F(x) = \frac{1}{2} \sin(x) + \frac{1}{2}.F(x)=21 sin(x)+21 .

Для x<−π2x < -\frac{\pi}{2}x<−2π , ймовірність дорівнює 0 (оскільки f(x)=0f(x) = 0f(x)=0 там):

F(x)=0,x<−π2.F(x) = 0, \quad x < -\frac{\pi}{2}.F(x)=0,x<−2π .

Для x>π2x > \frac{\pi}{2}x>2π , ймовірність дорівнює 1:

F(x)=1,x>π2.F(x) = 1, \quad x > \frac{\pi}{2}.F(x)=1,x>2π .

Отже, функція розподілу F(x)F(x)F(x) повністю:

F(x)={0,x<−π2,12sin⁡(x)+12,−π2≤x≤π2,1,x>π2.F(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{\pi}{2}, [\\](file:///) \frac{1}{2} \sin(x) + \frac{1}{2}, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, [\\](file:///) 1, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}F(x)=⎩⎨⎧ 0,21 sin(x)+21 ,1, x<−2π ,−2π ≤x≤2π ,x>2π .

3. Імовірність події ∣X∣≤π4|X| \leq \frac{\pi}{4}∣X∣≤4π

Щоб знайти ймовірність того, що −π4≤X≤π4-\frac{\pi}{4} \leq X \leq \frac{\pi}{4}−4π ≤X≤4π , обчислимо:

P(−π4≤X≤π4)=F(π4)−F(−π4).P\left(-\frac{\pi}{4} \leq X \leq \frac{\pi}{4}\right) = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F\left(-\frac{\pi}{4}\right).P(−4π ≤X≤4π )=F(4π )−F(−4π ).

Обчислимо значення функції розподілу в цих точках.

Для x=π4x = \frac{\pi}{4}x=4π :

F(π4)=12sin⁡(π4)+12=12⋅22+12=24+12.F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}.F(4π )=21 sin(4π )+21 =21 ⋅22 +21 =42 +21 .

Для x=−π4x = -\frac{\pi}{4}x=−4π :

F(−π4)=12sin⁡(−π4)+12=12⋅(−22)+12=−24+12.F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}.F(−4π )=21 sin(−4π )+21 =21 ⋅(−22 )+21 =−42 +21 .

Тепер обчислимо ймовірність:

P(−π4≤X≤π4)=(24+12)−(−24+12).P\left(-\frac{\pi}{4} \leq X \leq \frac{\pi}{4}\right) = \left( \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} \right) - \left( -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} \right).P(−4π ≤X≤4π )=(42 +21 )−(−42 +21 ).

Спрощуючи:

P(−π4≤X≤π4)=24+24=22.P\left(-\frac{\pi}{4} \leq X \leq \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.P(−4π ≤X≤4π )=42 +42 =22 .

Отже, ймовірність події −π4≤X≤π4-\frac{\pi}{4} \leq X \leq \frac{\pi}{4}−4π ≤X≤4π дорівнює:

P(−π4≤X≤π4)=22≈0.707.P\left(-\frac{\pi}{4} \leq X \leq \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707.P(−4π ≤X≤4π )=22 ≈0.707.